**Евгений Барский** (✉)

*Инженерный колледж Азриэли, Иерусалим, Израиль*

УДК 536.75:621.928.6

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЭНТРОПИИ ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ

Понятие энтропии является ключевым при анализе свойств массовых систем. Это понятие вначале было сформулировано в термодинамике, затем перенесено в газовые системы. В предыдущей статье автора удалось сформулировать понятие энтропии для двухфазных потоков. Анализ свойств такой энтропии позволил сформулировать условия инвариантности поведения частиц узкого класса крупности в условиях двухфазного течения. Кроме того, анализ выявил универсальный безразмерный параметр аффинизации кривых разделения, что позволяет управлять процессом разделения сыпучих материалов на фракции по крупности и плотности. Использование этого параметра позволит решить ряд проблемных задач для конкретных технологических процессов.

**Ключевые слова:** *энтропия, двухфазные потоки, аффинизация кривых разделения, хаотизирующий фактор.*

## ВВЕДЕНИЕ

При скоростях вертикального потока, обеспечивающих подъем всей твердой фазы вверх, реализуется так называемый транспортный режим. Скорость его ограничена снизу величиной, при которой даже самые крупные частицы не выпадают против течения. Минимальное значение этой скорости называют критической скоростью пневмо- или гидротранспорта в зависимости от того, какая непрерывная среда используется при этом: вода или воздух.

В технике находит применение и противоположный режим двухфазного течения, при котором образуется так называемый «падающий слой». В этом режиме все твердые частицы выпадают против течения среды. Для этого случая скорость потока ограничена сверху.

Та максимальная скорость, при которой даже самые мелкие частицы твердой фазы не транспортируются потоком, называется критической для падающего слоя. Частным случаем падающего слоя является так называемый неподвижный слой, при котором твердый материал лежит на решетке и продувается снизу вверх. Многие технологические процессы (например, сепарация, обогащение полезных ископаемых, кипящий слой) проводятся в диапазоне течений внутри критического режима, когда часть частиц поднимается с потоком, а другая часть таких же частиц выпадает против течения. Эти течения отличаются исключительной сложностью, поскольку они сопровождаются массой случайных факторов, таких как неравномерность полей скоростей и концентраций, взаимодействие частиц между собой и со стенками канала, неправильная форма частиц, турбулентность потока и т. п. Анализ таких систем невозможен на базе классических методов. Для критических потоков удалось определить дефиниции таких параметров, как энтропия, хаотизирующий фактор и потенциальное извлечение [1]. Воспользуемся основными определениями, указанными в предыдущих публикациях.

Энтропия

$$H = \ln\varphi, \quad (1)$$

где φ — число состояний системы.

Под системой понимается наиболее вероятное распределение совокупности всех частиц в обоих направлениях: с потоком и против потока. Число состояний системы определяется зависимостью $\varphi = 2^N$, где $N$ — число частиц в системе.

В общем случае для критических режимов для узкого класса крупности энтропия равна

$$H = N\cdot\ln2 - \frac{2z^2}{N}, \quad (2)$$

где $N$ — число частиц; $z$ — фактор извлечения при конкретном распределении узкого класса в оба выхода.

Потенциальное извлечение

$$l = -2zgdm, \quad (3)$$

где $g$ — ускорение свободного падения; $d$ — диаметр частицы; $m$ — масса частицы.

✉
Евгений Барский
E-mail: eugene@jce.ac.il

Хаотизирующий фактор χ определяется из соотношения

$$\frac{\partial H}{\partial I} = \frac{1}{\chi}, \quad (4)$$

$$\chi = w^2 m_0,$$

где $w$ — скорость потока среды; $m_0$ — масса среды в объеме частицы.

## ЭНТРОПИЯ СМЕШЕНИЯ

Считается, что энтропия возрастает при эволюции системы к равновесию и достигает максимума при достижении системой равновесия. Для системы из двух узких классов крупности при постоянстве хаотизирующего фактора достигаемое равновесие не означает стационарности. Всевозможные возмущения в двухфазном потоке могут нарушать это равновесие, т. е. уменьшать энтропию. Однако система постоянно будет возвращаться в наиболее вероятное состояние с максимальной энтропией. Для системы из двух узких классов крупности количество состояний первой системы равно $\varphi_1$ и каждое из них может реализоваться одновременно с любым из допустимых состояний второй системы $\varphi_2$. Таким образом, объединенная система будет иметь количество состояний, равное $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$.

Энтропия объединенной системы:

$$H = \ln\varphi = \ln\varphi_1 + \ln\varphi_2.$$

Это больше, чем $\ln(\varphi_1 + \varphi_2)$, т. е.

$$H_\Sigma > H_1 + H_2. \quad (5)$$

Чтобы почувствовать сложность и утонченность понятия энтропии, приведем следующий пример. Предположим, что в двух одинаковых объемах потока в каждом имеется одинаковое число частиц $N$. Если частицы одной системы хоть чем-то отличаются от частиц другой системы (например, размером или даже цветом), то при объединении этих систем общая энтропия возрастает.

Внутри каждой системы все частицы одинаковы, поэтому энтропия их составит

$$H = k \cdot \ln p = k \cdot \ln 1 = 0.$$

Общая вероятность смеси составит

$$p = \frac{(N_1 + N_2)!}{N_1! N_2!}. \quad (6)$$

Раскроем выражение (6) по формуле Стирлинга

$$\ln N! \approx N \cdot \ln n - N.$$

С учетом этого из выражения (6) получим

$$\Delta H = k[(N_1 + N_2) \cdot \ln(N_1 + N_2) - (N_1 + N_2) -$$
$$- N_1 \cdot \ln N_1 + N_1 - N_2 \cdot \ln N_2 + N_2] =$$
$$= k\{N_1[\ln(N_1 + N_2) - \ln N_1] + N_2[\ln(N_1 + N_2) - \ln N_2]\}.$$

Если принять, что $N_1 = N_2$, то

$$\Delta H = 2N \cdot \ln 2. \quad (7)$$

Это величина прироста энтропии.

Если же в обеих системах будут одинаковые неразличимые частицы, то прироста энтропии не будет. Просто $2N$ одинаковых частиц займут $2V$ объема.

## ЭНТРОПИЯ — ХАРАКТЕРИСТИКА НЕОБРАТИМОСТИ ПРОЦЕССА

Из предыдущего следует, что сумма изменений энтропии системы не может убывать. Поэтому если определена энтропия начального состояния $H_0$, то энтропия произвольного состояния составит

$$H_t = H_0 + \int_0^t \frac{dI}{d\chi}. \quad (8)$$

Различие бесконечно малых величин $dI$ и $d\chi$ состоит в том, что $dI$ — это бесконечно малая разность по сравнению с большим числом $N$, а $d\chi$ — бесконечно малое количество.

Обычно массовые процессы в своей основе необратимы, хотя это не очевидно. Это относится как к теплопередаче, так и к критическим режимам двухфазных течений.

Необратимость поцесса можно выразить соотношением

$$dH \geq \frac{dI}{\chi}. \quad (9)$$

Необратимые процессы описываются при помощи массовых сил и массовых потоков. При этом последние возникают как следствие действия массовых сил. В этом плане изменение энтропии можно представить в виде

$$dH = F \cdot dX, \quad (10)$$

где $F$ — некоторая сила, определяющая направление процесса как  разность температур в термодинамике или как градиент концентраций в диффузии; $X$ — поток, определяемый изменениями, происходящими в $N$ или в $I$.

Массовая сила при этом является функцией массовых переменных. При этом изменение энтропии складывается как сумма всех изменений, вызванных необратимыми потоками $dx_k$, что позволяет обобщить:

$$dH = \sum_k F_k dx_k \geq 0, \quad (11)$$

или

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k F_k \frac{dx_k}{dt} \geq 0. \quad (12)$$

Такая формулировка имеет еще один важный аспект: она применима не только ко всей системе, но и ко всем ее подсистемам. Поэтому в анализе можно рассматривать только один узкий класс крупности частиц, а затем переносить полученные результаты на другие классы.

### Соотношение основных статистических параметров

Чтобы записать энтропию в виде $H = f(N, I)$, воспользуемся выражениями (2) и (3). Возведем обе части выражения (3) в квадрат и определим выражение для $z^2$:

$$z^2 = \frac{I^2}{4(gdm)^2}. \tag{13}$$

Это выражение подставим в выражение (2):

$$H(N,I) = N\cdot\ln 2 - \frac{I^2}{2(gdm)^2 N}. \tag{14}$$

Из соотношения (4) следует:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{\partial H}{\partial I} = -\frac{I}{(gdm)^2 N}. \tag{15}$$

Отсюда

$$I = -\frac{N(gdm)^2}{\chi}. \tag{16}$$

Если выражение (16) подставить в выражение (14), получится зависимость

$$H(N,I) = N\cdot\ln 2 - \frac{N(gdm)^2}{2\chi^2}. \tag{17}$$

Из выражения (16) и зависимости (17) следует, что при увеличении хаотизирующего фактора потенциальное извлечение и энтропия возрастают, что соответствует физике процесса. Если сопоставить выражения для потенциального извлечения (3) и (16), можно получить

$$-2zmgd = -\frac{N(gdm)^2}{\chi}.$$

Отсюда

$$\frac{2z}{N} = \frac{gdm}{\chi} = \frac{gdm}{w^2 m_0} = \frac{gd(\rho-\rho_0)}{w^2\rho}. \tag{18}$$

Здесь получается связь между параметром распределения (извлечения) частиц и некоторым безразмерным комплексом $B$:

$$B = \frac{gd(\rho-\rho_0)}{w^2\rho_0}. \tag{19}$$

Как оказалось, этот комплекс имеет универсальный характер для критических режимов двухфазных течений, что подтверждено экспериментально.

На многоступенчатом классификаторе (рис. 1), состоящем из семи ступеней, при подаче материала на вторую ступень при сепарации по крупности гипсового щебня получаются кривые разделения (рис. 2):

$$F_f(x) = \frac{r_f}{r_s}\cdot 100\,\%, \tag{20}$$

где $F_f(x)$ — фракционное извлечение узкого класса крупности в мелкий продукт (верхний выход), %; $r_f$ — содержание узкого класса в мелком продукте, %; $r_s$ — содержание этого же класса в исходном питании, %.

Кривые разделения показывают зависимость извлечения разных классов полифракционной смеси от скорости восходящего потока.

На этом же аппарате проведено разделение различных сыпучих материалов с разной плотностью и гранулометрическим составом: поливинилхлорид (ρ = 1070 кг/м³), калийная соль (ρ = 1980 кг/м³), гипсовый щебень (ρ = 2200 кг/м³), молотый кварцит (ρ = 2675 кг/м³), цементный клинкер грубого помола (ρ = 3170 кг/м³), магнитный железняк (ρ = 4350 кг/м³), гранулированный сплав (ρ = 6210 кг/м³), тяжелый сплав (ρ = = 8650 кг/м³).

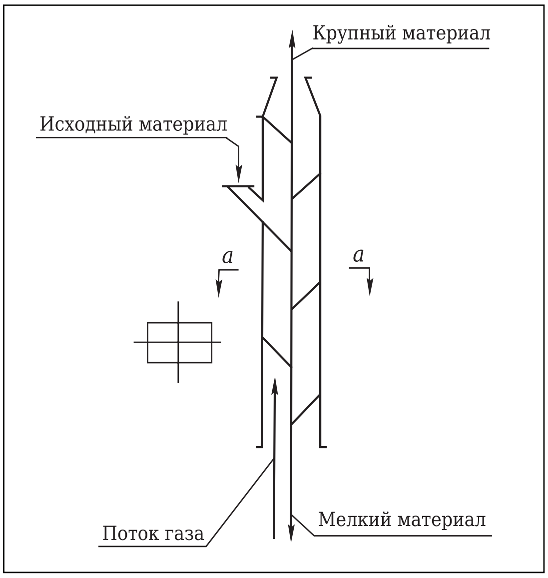


**Рис. 1.** Схема многоступенчатого сепаратора с пересыпными полками

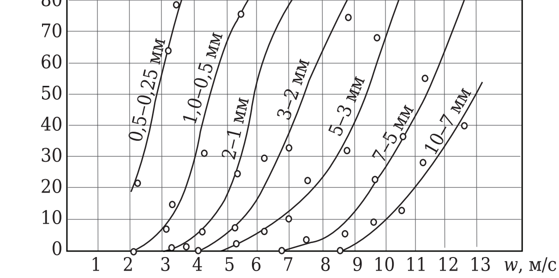


**Рис. 2.** Зависимость фракционного извлечения разных классов крупности от скорости потока $w$ ($z$ = 4; $i$ = 1)

При сведении результатов этих опытов в один график (рис. 3) оказалось, что параметр $B$ является параметром аффинизации кривых разделения. Это имеет принципиальное значение для понимания процессов классификации сыпучих материалов, их расчета и прогнозирования получаемых продуктов, а также для конструирования аппаратов с максимальной эффективностью для конкретных технологических процессов.

Вернемся к зависимости (17). Если эту же систему частиц можно рассматривать в другом поле (центробежном, электрическом, магнитном, ультразвуковом и т. д.), то при сохранении значения энтропии для них можно записать:

$$N\cdot\ln 2-\frac{N(gdm)^2}{2\chi_1^2}=N\cdot\ln 2-\frac{N(gdm)^2}{2\chi_2^2}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{g^2}{a^2}=\frac{\chi_1^1}{\chi_2^2},\ \text{или}\ \frac{g}{a}=\frac{\chi_1}{\chi_2},$$

где $a$ — ускорение поля другой природы.

Таким образом, полученные зависимости имеют универсальный характер для всех мыслимых видов двухфазных течений.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Показано, что в процессе критических режимов двухфазных потоков без специальных усилий энтропия твердой фазы возрастает до своего максимального значения в конкретных условиях.

2. С учетом этого свойства энтропии двухфазное течение в критических условиях является необратимым процессом.

3. Анализ двухфазного критического течения с позиций статистического подхода позволяет определить универсальный безразмерный критерий аффинизации кривых разделения.

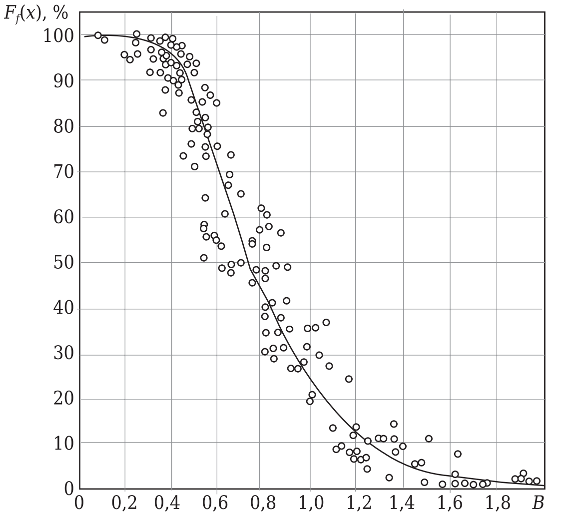


**Рис. 3.** Универсальная зависимость $F_f(x) = f(B)$ при разделении материалов разной крупности

**Библиографический список**

1. ***Barsky, E.*** Entropy of complex processes and systems / *E. Barsky*. — Elsevier, 2021.

2. ***Prigogine, I.*** Order out chaos / *I. Prigogine, I. Stengers.* — Moskow, URSS, 2005.

3. ***Barsky, E.*** Cascade separation of powders / *E. Barsky, M. Barsky.* — Cambridge : Cambridge International Science Publishing, 2006.

4. ***Kittel, C.*** Thermal physics / *C. Kittel*. — New York : John Willey and Sons, Inc., 1977. ■

*Получено 10.10.21*